EPFL

Enseignants: Basterrechea, Dubuis, Huruguen
Algèbre Linéaire & Géométrie - MAN
3 juillet 2023
Durée : 180 minutes

X

Examen (corrigé)

SCIPER : **XXXXXX**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 10 pages, la dernière étant vide. Il y a 12 questions pour un total de 42 points. Merci de ne pas dégrafer le livret.

- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- Aucun **document** n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout **outil électronique** est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
  le nombre de points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à **encre noire** ou **bleu foncé** sauf éventuellement pour vos dessins que vous pouvez faire au **crayon**.
- Effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Aucune **feuille supplémentaire** ne sera distribuée.
- Les **feuilles de brouillon** seront ramassées mais ne seront pas corrigées.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren
☒ ☑ ■	☐	☐ ☐

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix unique

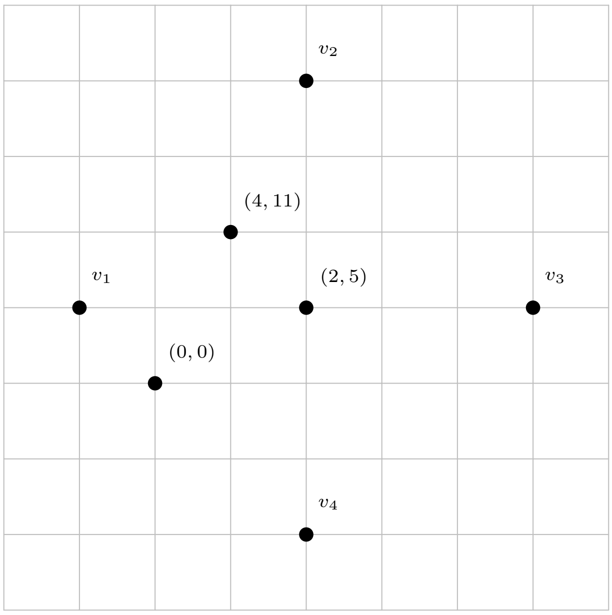
Pour chaque énoncé proposé, plusieurs questions sont posées. Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Enoncé

Soient les bases de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$\mathcal{B} = (4,11),(2,5) \qquad \mathcal{B}' = (2,4),(2,10).$$

On donne également le dessin suivant.



Attention ! Le quadrillage donné **ne correspond pas** aux coordonnées canoniques.

Question 1 *(2 points)* Quelle est la matrice de changement de base de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$?

☐ $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 16 & -2 \\ 45 & -6 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 45 & -16 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ ■ $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Question 2 *(2 points)* Sur le dessin ci-dessus, lequel des quatre vecteurs suivants correspond à $(2,4)$?

☐ v_2 ☐ v_4 ☐ v_1 ■ v_3

Question 3 *(2 points)* Si v_1 est le vecteur sur le dessin, calculer $[v_1]_{\mathcal{B}'}$.

☐ $\begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -4 \\ 61 \end{pmatrix}$ ■ $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{51}{6} \end{pmatrix}$

Enoncé

Soient $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ deux applications linéaires telles que :

$$f(1,1,1) = (0,0,0)\,, \quad f(1,0,2) = (4,0,6)\,, \quad f^{-1}(\{(1,0,2)\}) \neq \varnothing \quad \text{et} \quad g^{-1}(\{(0,0,0)\}) = \{(0,0,0)\}.$$

Question 4 *(2 points)* Le rang de f vaut :

- ■ 2
- ☐ 3
- ☐ 1
- ☐ 0

Question 5 *(2 points)* La dimension du noyau de l'application $g \circ f \circ g$ vaut :

- ☐ 3
- ■ 1
- ☐ 0
- ☐ 2

Question 6 *(2 points)* Parmi les éléments de $\mathbb{R}^3$ ci-dessous, lequel appartient à $\mathrm{Im} f$?

- ■ $(3,0,23)$
- ☐ $(-39,67,-201)$
- ☐ $(17,61,-68)$
- ☐ $(119,-41,12)$

Enoncé

On donne l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,,\ (x,y) \to (5x+13y, -3x-7y)$$

dont on note A la matrice en base canonique.

Question 7 *(2 points)* Pour quelle base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ ci-dessous, la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ est-elle sous forme réduite ?

- ☐ $\mathcal{B} = (0,1), (\frac{13}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}})$
- ☐ $\mathcal{B} = (1,0), (\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$
- ■ $\mathcal{B} = (0,1), (\frac{13}{\sqrt{3}}, -2\sqrt{3})$
- ☐ $\mathcal{B} = (1,0), (2\sqrt{3}, \sqrt{3})$

Question 8 *(2 points)* Parmi les nombres suivants, sélectionner le plus petit n vérifiant que :

$$\det(A^n) \geqslant 1000.$$

- ☐ $n = 4$
- ☐ $n = 3$
- ☐ $n = 6$
- ■ $n = 5$

Question 9 *(2 points)* Pour quel entier n ci-dessous la matrice A^n est-elle diagonalisable ?

- ☐ $n = 103$
- ☐ $n = 94$
- ■ $n = 96$
- ☐ $n = 101$

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 10: *Cette question est notée sur 9 points.*

■ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5 □ 6 □ 7 □ 8 □ 9

Soit la matrice dépendante d'un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha - 2 & 2\alpha + 3 \\ -\alpha^2 + \alpha + 5 & \alpha^2 - 1 & -\alpha^2 + 4 \\ -2 & -\alpha - 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer et factoriser $\det(A)$.

(b) Déterminer $\mathrm{rg}(A)$ en fonction de α.

(c) En discutant selon les cas identifiés au (b), donner une décomposition colonne-ligne minimale de A.

Solution

(a) On a :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & -2\alpha - 2 & 2\alpha + 3 \\ -\alpha^2 + \alpha + 5 & \alpha^2 - 1 & -\alpha^2 + 4 \\ -2 & -\alpha - 1 & \alpha - 1 \end{vmatrix} &= (\alpha+1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2\alpha + 3 \\ -\alpha^2 + \alpha + 5 & \alpha - 1 & -\alpha^2 + 4 \\ -2 & -1 & \alpha - 1 \end{vmatrix} && \text{(extraction de } \alpha+1 \text{ de } C_2) \\
&= (\alpha+1)\begin{vmatrix} 5 & 0 & 5 \\ -\alpha^2 + \alpha + 5 & \alpha - 1 & -\alpha^2 + 4 \\ -2 & -1 & \alpha - 1 \end{vmatrix} && (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3) \\
&= (\alpha+1)\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -\alpha^2 + \alpha + 5 & \alpha - 1 & -\alpha - 1 \\ -2 & -1 & \alpha + 1 \end{vmatrix} && (C_3 \leftarrow C_3 - C_1) \\
&= 5(\alpha+1)\begin{vmatrix} \alpha - 1 & -\alpha - 1 \\ -1 & \alpha + 1 \end{vmatrix} && \text{(développement selon } L_1) \\
&= 5(\alpha+1)^2\begin{vmatrix} \alpha - 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} && \text{(extraction de } \alpha+1 \text{ de } C_2) \\
&= 5(\alpha+1)^2(\alpha - 2)
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\det(A) = 5(\alpha+1)^2(\alpha-2)$$

(b) Il y a trois cas possibles.

i. Si $\alpha \notin \{-1, 2\}$, alors A est inversible et donc de rang maximal 3. Donc :

$$\alpha \notin \{-1, 2\} \implies \mathrm{rg}(A) = 3$$

ii. Si $\alpha = -1$, alors :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 1, car les lignes/colonnes sont proportionnelles. Autrement dit :

$$\alpha = -1 \implies \mathrm{rg}(A) = 1$$

iii. Si $\alpha = 2$, alors :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 7 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est nécessairement de rang 2, car les lignes/colonnes ne sont pas proportionnelles (donc de rang > 1), mais le déterminant est nul (donc de rang < 3). Donc :

$$\alpha = 2 \implies \mathrm{rg}(A) = 2$$

(c) Nous reprenons les trois cas ci-dessus :

i. Si $\alpha \notin \{-1, 2\}$, alors nous avons, par exemple, une décomposition selon les lignes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha - 2 & 2\alpha + 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \alpha + 5 & \alpha^2 - 1 & -\alpha^2 + 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -\alpha - 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

ou une décomposition selon les colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha^2 + \alpha + 5 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 - 2\alpha \\ \alpha^2 - 1 \\ -\alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha + 3 \\ -\alpha^2 + 4 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii. Une décomposition immédiate est dans ce cas :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

iii. En observant que $C_2 = C_1 - C_3$, nous avons la décomposition :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 11: *Cette question est notée sur 7 points.*

■0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7

Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les sous-espaces vectoriels :

$$V = \mathrm{Vect}((2,0,-1),(1,2,1)) \quad \text{et} \quad W : \frac{x}{2} = 2y = z$$

et on note $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection sur V parallèlement à W.

(a) Déterminer une équation cartésienne de V.

(b) Donner la nature géométrique et les éléments caractéristiques de l'application $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - 2f$.

(c) Donner l'expression de f, c'est-à-dire pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $f(x,y,z)$.

Solution

(a) Une équation de V est obtenue en imposant que le déterminant suivant soit nul :

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y & 0 & 2 \\ z & -1 & 1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 3y + 4z = 0.$$

(b) Appelons A la matrice de f en base canonique et B celle de g. On a donc :

$$B = I_3 - 2A \quad \text{et} \quad \underbrace{A^2 = A}_{\text{car } f \text{ projection}}.$$

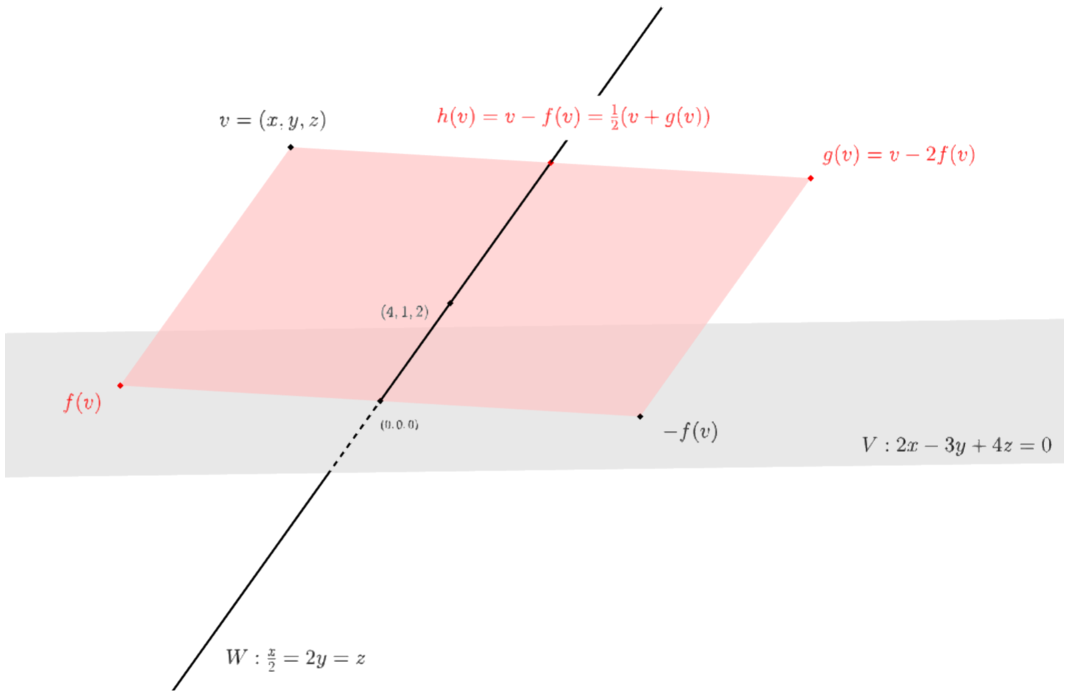
Il vient alors :

$$B^2 = (I_3 - 2A)^2 = I_3 - 4A + 4A^2 = I_3.$$

Par conséquent g est une symétrie. Pour identifier les éléments caractéristiques de g on peut introduire la projection associée :

$$h = \tfrac{1}{2}(g + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - f.$$

Comme h est la projection sur W parallèlement à V on peut conclure que g est la symétrie par rapport à W parallèlement à V.



(c) L'application linéaire :

$$h = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - f$$

est la projection sur W, qui est la droite vectorielle engendrée par $(4, 1, 2)$, parallèlement à V, qui est le plan vectoriel d'équation :

$$2x - 3y + 4z = 0.$$

On sait alors que la matrice C de h en base canonique est :

$$C = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 8 & -12 & 16 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Finalement, on en déduit :

$$A = I_3 - C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 8 & -12 & 16 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 & -16 \\ -2 & 16 & -4 \\ -4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$f(x, y, z) = \tfrac{1}{13}(5x + 12y - 16z, -2x + 16y - 4z, -4x + 6y + 5z).$$

Question 12: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8

On donne les applications linéaires suivantes, dont on note A et B les matrices en bases canoniques :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad\qquad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \to (2x+3y+z, -y+z) \qquad\qquad (x,y,z) \to (2x+4z, -\tfrac{1}{2}x - y)$$

(a) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.

(b) Montrer que les matrices A et B sont ligne-équivalentes.

(c) On note $\mathcal{B}_{\text{can}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$[f]_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}} = B.$$

(d) Sans aucune justification, donner une matrice colonne-équivalente mais pas ligne-équivalente à $A+2B$.

Solution On a donc :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Le noyau de f est l'ensemble des solutions du système homogène de matrice A :

$$\begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2z \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) = z(-2,1,1).$$

On en déduit que $\operatorname{Ker} f$ est la droite vectorielle engendrée par $(-2,1,1)$.

(b) De manière générale, on sait que :

$$A \text{ et } B \text{ ligne-équivalentes} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g.$$

En observant que les deux lignes de B ne sont pas proportionnelles on obtient que l'application g est de rang 2. Par le théorème du rang, le noyau de g est donc une droite vectorielle. Il n'y a donc plus qu'à observer que :

$$g(-2,1,1) = (0,0)$$

pour conclure que f et g ont le même noyau :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$$

et donc que A et B sont ligne-équivalentes.

(c) En posant $\mathcal{B} = v_1, v_2$ on obtient que :

$$[f]_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}} = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(1,0,0) = 2v_1 - \frac{1}{2}v_2 \\ f(0,1,0) = -v_2 \\ f(0,0,1) = 4v_1\,. \end{cases}$$

Par un calcul direct on trouve :

$$f(0,0,1) = (1,1) \quad \text{et} \quad f(0,1,0) = (3,-1).$$

Les deux dernières relations ci-dessus donnent alors directement :

$$v_1 = \tfrac{1}{4}(1,1) \quad \text{et} \quad v_2 = (-3,1).$$

(d) La matrice :
$$A+2B=\begin{pmatrix}6&3&9\\-1&-3&1\end{pmatrix}$$
est de rang 2 et on a :
$$\mathrm{Ker}(f+2g)=\mathrm{Vect}((-2,1,1)) \text{ et } \mathrm{Im}(f+2g)=\mathbb{R}^2.$$
Une matrice $C\in \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ est solution du problème posé si et seulement si :
$$C\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad\text{et}\quad \mathrm{rg}(C)=2.$$
Par exemple, les matrices suivantes conviennent :
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\dots$$